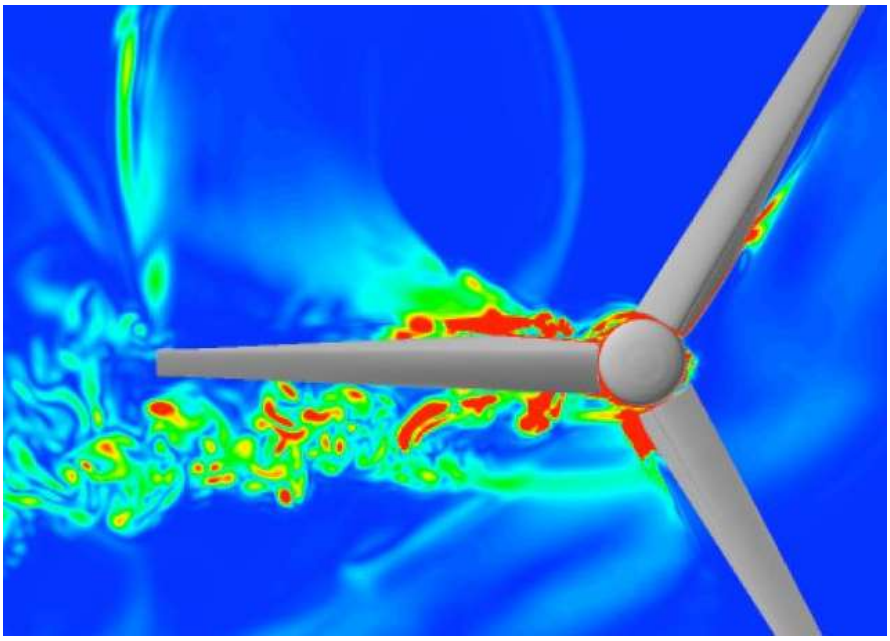


كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم القوى الميكانيكية

ميكانيك السوائل 2

معادلة الاستمرار

قانون انحفاظ الكتلة

الدكتور المهندس
سعيد شقير

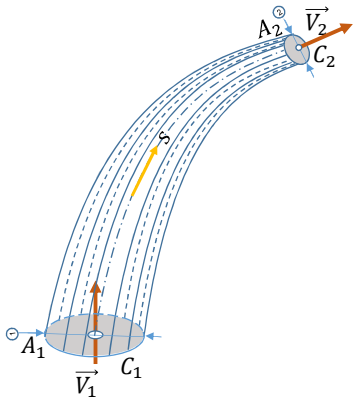
محتوى العرض

- مقدمة
- معادلة الاستمرار وحيدة البعد (نظرية خيط التيار).
- معادلة الإستمرار العامة.

مقدمة

- اذا اعتبرنا حقل جريان (أو أي جزء منه) لسائل ما فنقول إن حركة السائل في هذا الحقل (أو الجزء) مستمرة , اذا لم تكن هناك اية تجاويف Cavity أو مناطق انقطاع لا يشغلها السائل.
- في هذه الحالة فإن كتلة السائل في واحدة الزمن التي تعبر أي سطح مغلق مثبت في حقل الجريان تبقى ثابتة. وهذا ما يطلق عليه قانون انحفاظ الكتلة أو المادة.
- يطلق على المعادلة التفاضلية التي تعبر عن هذا القانون معادلة الاستمرار Continuty equation التي صاغها لأول مرة العالم الروسي لومونوسوفM.W. Lomonossowf (1711-1765) عام 1748.

معادلة الاستمرار وحيدة البعد (نظرية خيط التيار)

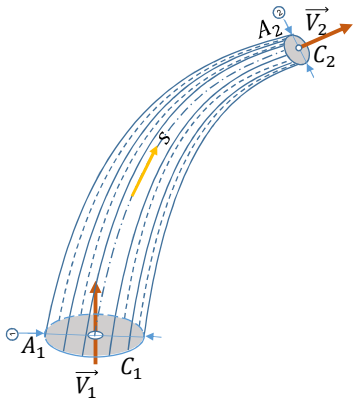


- لاشتقاق معادلة الاستمرار في صياغتها البسيطة نعتبر أنبوبة التيار في الشكل , التي تمثل جملة فيزيائية مفتوحة أو جملة جريان Flow system حيث تدخل مقطع الدخول الذي مساحته A_1 والمحدد بالمنحني المغلق C_1 كتلة معينة من السائل تخرج بكاملها من مقطع الخروج الذي مساحته A_2 والمحدد بالمنحني المغلق C_2.
- يفرض أن خيط التيار مستمر وخال من الينابيع والبالوعات, أي انه لا يمكن أن يظهر أي سائل جديد أو يختفي جزء من السائل العابر,
- لتكن $\rho = f(s)$ كثافة السائل التي نفرضها متغيرة في اتجاه الجريان s , فتكون كتلة السائل في واحدة الزمن التي تعبر مقطعا ما من انبوبة التيار مساحته A والسرعة الموزعة عليه بانتظام V هي : $\dot{m} = \rho VA$.
- تبقى هذه الكتلة بموجب قانون إنحفاظ المادة ثابتة على طول أنبوبة التيار. وعليه تأخذ معادلة الاستمرار للجريانات وحيدة البعد المستقرة الصياغة التالية:

معادلة الاستمرار وحيدة البعد (نظرية خيط التيار)

- وعليه تأخذ معادلة الاستمرار للجريانات وحيدة البعد المستقرة الصياغة التالية:

$$\dot{m} = dm/dt = \rho VA = const \quad (\boldsymbol{V}||\boldsymbol{A}); => d\dot{m} = 0$$



حيث:

- ✓ dm كتلة السائل التي تعبر A خلال الفترة الزمنية القصيرة جدا dt, $\boldsymbol{A}$
- ✓ شعاع الناظم على السطح. يطلق على $\dot{m}$ غزارة التدفق الكتلي rat of mass discharge او التيار الكتلي, وله واحدة القياس.

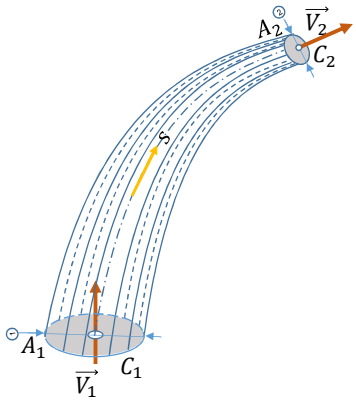
$$[\dot{m}] = [m/t] = kg\ s^{-1} = \frac{1}{9.81} kp\ s\ m^{-1}$$

- ✓ بينما يسمى الجداء ρV كثافة التيار الكتلي. أما قيمة الثابت فتنتج من تطبيق المعادلة على مقطع مساحته معروفة بالإضافة لقيمة السرعة والكثافة

معادلة الاستمرار وحيدة البعد (نظرية خيط التيار)

- وعليه تأخذ معادلة الاستمرار للجريانات وحيدة البعد المستقرة الصياغة التالية:

$$\dot{m} = dm/dt = \rho VA = const \quad (\boldsymbol{V}||\boldsymbol{A}); => d\dot{m} = 0$$



- وبؤخذ عادة مقطع الدخول① أو الخروج② حيث ينتج :

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 = const$$

- في حالة الجريانات غير القابلة للإنضغاط, أي ذات الكثافة الثابتة $\rho = const$

تأخذ معادلة الاستمرار شكلا ابسط:

$$\dot{V} = dV/dt \equiv Q = VA = const \quad (\boldsymbol{V}||\boldsymbol{A}): d\dot{V} = 0$$

- ✓ السائل الذي يعبر A خلال dt, كما تصبح العلاقة من الشكل : $V_1 A_1 = V_2 A_2 = const$ التي تتحدد منها قيمة الثابت.
- ✓ يطلق على $Q = \dot{V}$ غزارة التدفق الحجمي أو التيار الحجمي Volume flow وله واحدة القياس:

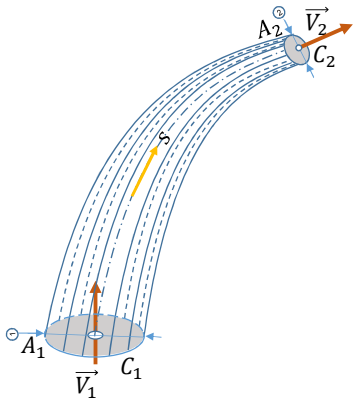
$$[Q] = [V/t] = m^3\ s^{-1}$$

معادلة الاستمرار وحيدة البعد (نظرية خيط التيار)

- على أساس ما تقدم نصل إلى صياغة الجملة التالية:

✓ شرط الاستمرار للجريانات وحيدة البعد المستقرة يقضي في حالة السوائل القابلة للإنضغاط بأن يكون التيار الكتلي كجداء لكثافة التيار الكتلي في مساحة المقطع ثابتا.

✓ وفي حالة السوائل غير القابلة للإنضغاط بأن يكون التيار الحجمي كجداء للسرعة في مساحة المقطع ثابتا, وذلك على طول انبوبة التيار"



معادلة الاستمرار وحيدة البعد (نظرية خيط التيار)

- إن معادلة الاستمرار بصيغتها تنطبق على أيضا على حالة توحيد (وصل) أو تفريغ مجموعة من أنابيب التيار.
- التي يمكن تصورها عمليا تمثل شبكة من الأنابيب لنقل الغاز أو الماء.

ويكون في هذه الحالة:

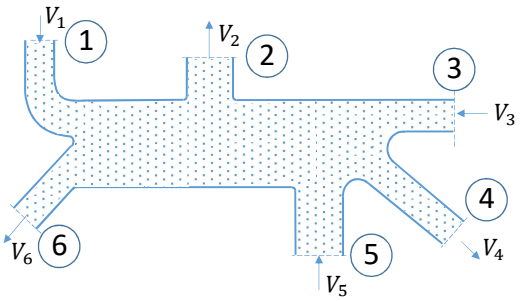
$$\sum_i \rho_i V_i A_i = \sum_j \rho_j V_j A_j \quad (\rho \neq const)$$

$$\sum_i V_i A_i = \sum_j V_j A_j \quad (\rho = const)$$

حيث: i=1,2,3,..... يشير الى مقاطع دخول السائل

و j=2,4,6,.... إلى مقاطع خروجه.

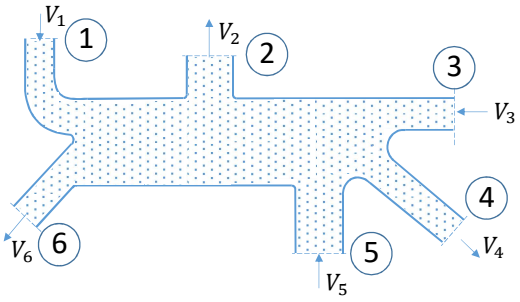
- وهذا يعني أن مجموع التيارات الكتلية (أو الحجمية) الداخلة الى الجملة الفيزيائية المفتوحة يساوي الى مجموع التيارات الكتلية (أو الحجمية) الخارجة منها.



تطبيق معادلة الاستمرار في حالة وصل أو تفريع مجموعة من أنابيب التيار

معادلة الاستمرار وحيدة البعد (نظرية خيط التيار)

- من المعادلة السابقة نستخلص مايلي :
  - ✓ كلما صغرت مساحة مقطع أنبوبة التيار تزداد السرعة, وبالعكس.
  - ✓ على هذا الأساس يمكن الحصول على فكرة واضحة عن مناطق السرعة الأعظمية والأصغرية
  - ✓ إذا رسمنا صورة الجريان بحيث نقسم حقل الجريان الى عدد لا نهائي من أنبوبات التيار ذات التيار الحجمي الواحد, فيتضح بسهولة أن السرعة تزداد في المناطق التي تتقارب فيها خطوط التيار من بعضها, وتقل في المناطق التي تتباعد فيها خطوط التيار عن بعضها.



تطبيق معادلة الاستمرار في حالة وصل أو تفريع مجموعة من أنابيب التيار

معادلة الاستمرار وحيدة البعد (نظرية خيط التيار)

- هذه النتيجة تنطبق على الجريانات غير القابلة للانضغاط عامة و تنطبق على الجريانات القابلة للانضغاط حتى سرعات أقل من سرعة الصوت.
- أما إذا زادت السرعة عن سرعة الصوت, أي عندما يكون تغير الكثافة كبيرا, فتكون هناك علاقة معاكسة تماما بين السرعة والمقطع:

$$d\dot{m} = 0 => d(\rho VA) = VAd\rho + \rho AdV + \rho VdA = 0$$

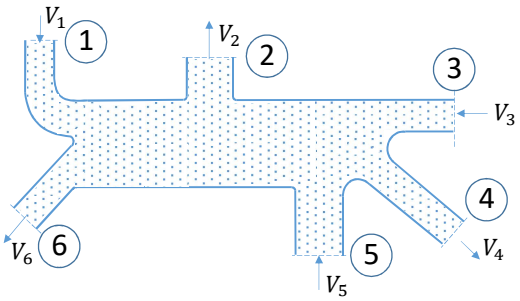
- ومنه بعد التقسيم على ρVA ينتج:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0$$

صياغة أخرى لمعادلة الاستمرار للجريانات المستقرة القابلة للإنضغاط

- فاذا اعتبرنا الحالة الحدية التي يكون فيها التغير النسبي للكثافة أكبر بكثير من التغير النسبي للسرعة نجد:

$$\frac{d\rho}{\rho} \gg \frac{dV}{V} \rightarrow \frac{dA}{A} = -\frac{d\rho}{\rho} \rightarrow A \sim \frac{1}{\rho} = \upsilon$$



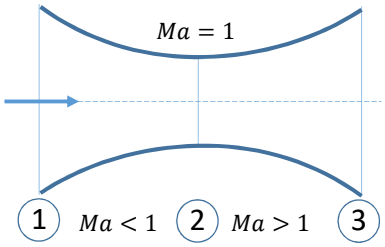
تطبيق معادلة الاستمرار في حالة وصل أو تفريع مجموعة من أنابيب التيار

معادلة الاستمرار وحيدة البعد (نظرية خيط التيار)

- فاذا اعتبرنا الحالة الحدية التي يكون فيها التغير النسبي للكثافة أكبر بكثير من التغير النسبي للسرعة نجد:

$$\frac{d\rho}{\rho} \gg \frac{dV}{V} \rightarrow \frac{dA}{A} = -\frac{d\rho}{\rho} \rightarrow A \sim \frac{1}{\rho} = \upsilon$$

- أي ان المقطع يتناسب طردا مع الحجم النوعي للغاز.
- وحيث أن زيادة السرعة تؤدي لنقصان الضغط وبالتالي لزيادة الحجم النوعي فيجب توسيع المقطع للحصول على سرعات عالية أكبر من سرعة الصوت.
- على هذا الاساس صممت **نفاثة لافال** نسبة للمهندس السويدي دي لافال (1845-1913 de Laval) والتي تشكل عنصرا أساسيا في بناء العنفات البخارية والغازية.



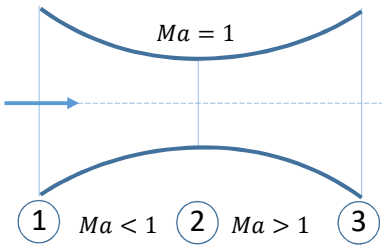
نفاثة لافال :

1. $Ma < 1$ جريان تحت صوتي
2. $Ma = 1$ جريان صوتي
3. $Ma > 1$ جريان فوق صوتي

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

معادلة الاستمرار وحيدة البعد (نظرية خيط التيار)

- تتألف أنبوبة لافال من أنبوب يتضيق في المقدمة تدريجيا حتى مقطع اصغري حرج ثم يتوسع تدريجيا
- في القسم المتضيق تتزايد السرعة حتى تبلغ سرعة الصوت في منطقة الاختناق.
- من ثم تصبح السرعة فوق صوتية.
- تجدر الأشارة هنا أن تفاصيل هذا الجريان تدخل في أبحاث الغازديناميك.
- إن تطبيق معادلة الاستمرار بصيغتها الواردة أعلاه يستلزم, كما ذكرنا, أن يكون الجريان مستقراً, والسرعة موزعة بانتظام على المقطع. وهذا ما ينطبق على الجريانات المثالية.



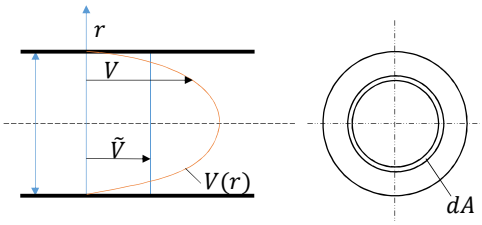
نفاثة لافال :

1. $Ma < 1$ جريان تحت صوتي
2. $Ma = 1$ جريان صوتي
3. $Ma > 1$ جريان فوق صوتي

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

معادلة الاستمرار وحيدة البعد (نظرية خيط التيار)

- إن تطبيق معادلة الاستمرار بصيغتها الواردة أعلاه يستلزم, كما ذكرنا, أن يكون الجريان مستقراً, والسرعة موزعة بانتظام على المقطع. وهذا ما ينطبق على الجريانات المثالية.
- أما في الحالة التي يكون فيها توزع السرعة V على مقطع أنبوب التيار A غير منتظم, كما هو الحال بالنسبة **للجريان الحقيقي** في الأنابيب, فيعمد من أجل الإبقاء على صحة المعادلات السابقة إلى إدخال مفهوم كثافة التيار الكتلي الوسطية $\widetilde{\rho V}$ في حالة السوائل المتغيرة الحجم, ومفهوم **السرعة الوسطية للتيار الحجمي** $\tilde{V}$ Mean Velocity في حالة السوائل الثابتة الحجم.
-



تعريف السرعة الوسطية للتيار الحجمي (أو كثافة التيار الكتلي الوسطية) لتطبيق معادلة الإستمرار على الجريانات الحقيقية.

معادلة الاستمرار وحيدة البعد (نظرية خيط التيار)

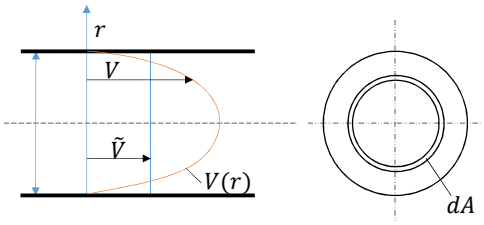
- فإذا جزأنا أنبوب التيار الى عدد لا نهائي من أنبوبات التيار ذات المقاطع اللانهائية الصغر dA بحيث يمكن اعتبار السرعة موزعة عليها بانتظام فينتج بالنسبة للتيار الكتلي الاجمالي على غرار:

$$\dot{m} = \widetilde{\rho V} A = \int_{(A)} \rho V dA \rightarrow \widetilde{\rho V} = \frac{1}{A} \int_{(A)} \rho V dA$$

- وبالنسبة للتيار الحجمي الاجمالي على غرار:

$$Q = \tilde{V} A = \int_{(A)} V dA \rightarrow \tilde{V} = \frac{1}{A} \int_{(A)} V dA$$

- إن الحساب العملي للجريان في الأنابيب يعتمد أساسا على $\tilde{V}$ أو $\widetilde{\rho V}$, كما سترى فيما بعد



تعريف السرعة الوسطية للتيار الحجمي (أو كثافة التيار الكتلي الوسطية) لتطبيق معادلة الإستمرار على الجريانات الحقيقية.

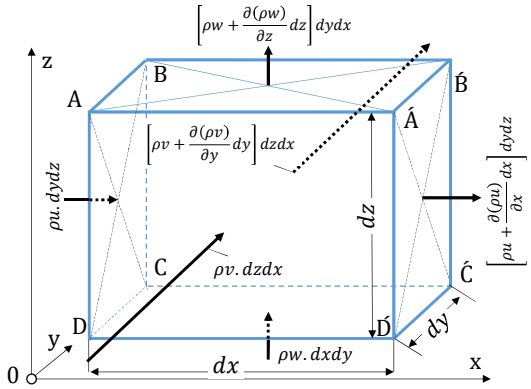
معادلة الاستمرار العامة

- نعتبر الحركة العامة غير المستقرة لسائل قابل للانضغاط $\boldsymbol{V} = f(x,y,z,t)$, $\rho = f(x,y,z,t)$, ونقتطع من داخل حقل الجريان جزئيا حجميا ما , نفرضه للسهولة بشكل متوازي مستطيلات أطوال أضلاعه dx,dy,dz التي نأخذها موازية لمحاور الأحداثيات x,y,z

- نفرض أن u,v,w , تمثل مركبات شعاع السرعة V للسائل الداخل عبر وجوه متوازي المستطيلات

- باعتبار أن مساحة هذه الوجوه صغيرة جداً , فتكون كثافة التيار الكتلي موزعة عليها بانتظام. وتكون كتلة السائل التي تدخل السطح الأيسر A,B,C,D الذي مساحته dA=dydz خلال الفترة الزمنية dt باتجاه المحور x هي: $(\rho u)dydzdt$.

- بينما تبلغ كتلة السائل التي تخرج من السطح الأيمن المقابل $\acute{A}\acute{B}\acute{C}\acute{D}$ خلال dt بالاعتماد على طريقة نشر التابع كسلسلة تايلور وإهمال كافة الحدود ذات المراتب العليا:



اشتقاق معادلة الاستمرار العامة للجريانات غير القابلة للانضغاط غير المستقرة

معادلة الاستمرار العامة

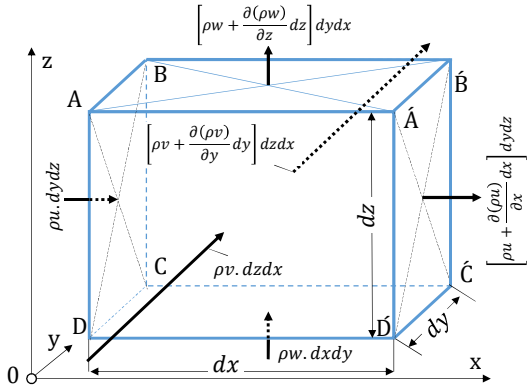
- بالاعتماد على طريقة نشر التابع **كسلسلة تايلور** وإهمال كافة الحدود ذات المراتب العليا:

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\right]dydzdt$$

- ومنه ينتج الفرق بين كتلة السائل الخارجة والداخلة باتجاه x:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dxdydzdt$$

- بنفس الطريقة نجد قيمة هذا الفرق باتجاه المحورين الآخرين z,y.



اشتقاق معادلة الاستمرار العامة للجريانات غير القابلة للانضغاط غير المستقرة

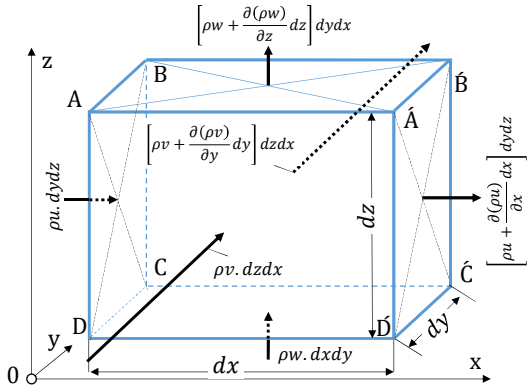
معادلة الاستمرار العامة

- يكون بالتالي الفرق الكلي بين كتلة السائل الخارجة والداخلة عبر السطح الخارجي للجزيء الحجمي خلال الزمن dt:

$$d\dot{m} = \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] dxdydzdt$$

هذا الفرق في كتلة السائل يجب أن يعادله **بموجب قانون انحفاظ الكتلة** تغير في كتلة السائل داخل الجزيء الحجمي ناتج عن تغير كثافة السائل مع الزمن.

- فإذا كانت كثافة السائل في اللحظة t هي $\rho(x,y,z,t)$ فتصبح في اللحظة t تساوي $\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + dt$
- يكون بالتالي التغير الذي يطرأ على كتلة السائل داخل الجزيء الحجمي :



اشتقاق معادلة الاستمرار العامة للجريانات غير القابلة للانضغاط غير المستقرة

$$dm = \left[\rho - \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right)\right] dV = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dtdxdydz$$

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

معادلة الاستمرار العامة

- من تساوي العلاقتين السابقتين ينتج بعد الاختصار $dtdxdydz$ والإصلاح:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

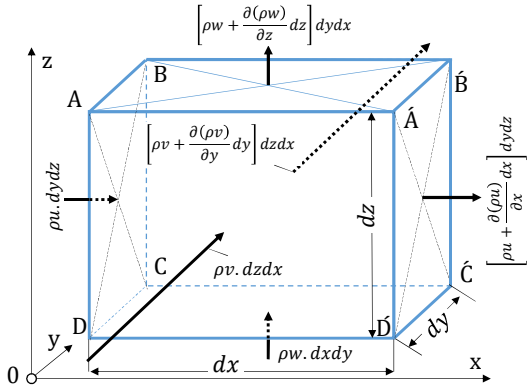
يطلق عليها **معادلة الاستمرار العامة** لجريان ثلاثي المقاس, غير مستقر وقابل للانضغاط

- إذا أجرينا الاشتقاق الجزئي لمركبات كثافة التيار الكتلي المحصورة ضمن أقواس ولاحضنا بموجب المعادلة السابقة أن $D\rho/Dt$ يمثل التفاضل المادي التام للكثافة وأن :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \beta \qquad ; [\beta] = s^{-1}$$

يمثل **معامل التمدد الحجمي** أو سرعة تمدد واحدة حجم السائل

- فإن العلاقة السابقة تأخذ الشكل التالي



اشتقاق معادلة الاستمرار العامة للجريانات غير القابلة للانضغاط غير المستقرة

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\beta = 0$$

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

معادلة الاستمرار العامة

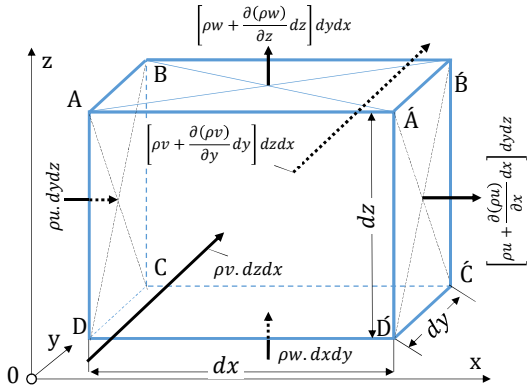
- في حالة **الجريان المستقر** يكون $d\rho/dt = 0$ وتصبح من الشكل :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

- أو بالصيغة الشعاعية الأبسط:

$$div(\rho \boldsymbol{V}) = 0$$

التي تعني أن شرط الاستمرار لجريان قابل للإنضغاط ومستقر يقضي بأن يكون تفرق شعاع Divergence كثافة التيار الكتلي معدوماً.



اشتقاق معادلة الاستمرار العامة للجريانات غير القابلة للانضغاط غير المستقرة

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

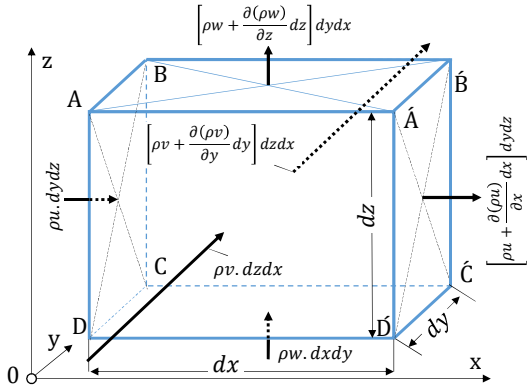
معادلة الاستمرار العامة

- في حالة الجريان ثنائي المقاس أي عندما $w = 0$ مثلاً، ينتج **للجريانات غير المستقرة** :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

- للجريانات المستقرة:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$



اشتقاق معادلة الاستمرار العامة للجريانات غير القابلة للانضغاط غير المستقرة

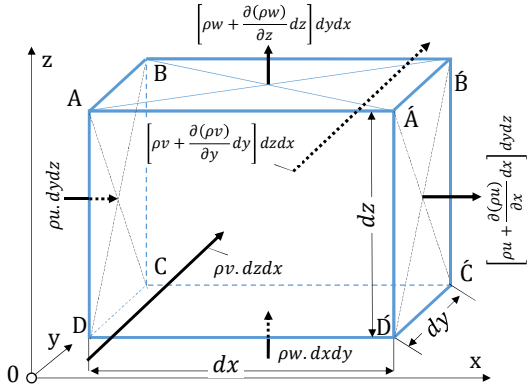
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

معادلة الاستمرار العامة

- في حالة الجريانات غير القابلة للانضغاط $\rho = \text{const}$, تنتج معادلة الاستمرار من المعادلات السابقة باستبدال التيار الكتلي بسرعة التيار الحجمي وتأخذ الشكل الأبسط نسبيا التالي:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad \text{أي} \qquad div\mathbf{V} = 0$$

شرط الاستمرار لجريان غير قابل للانضغاط خال من الينابيع والبالوعات يقضي بأن يكون التيار الحجمي الداخل عبر السطح الخارجي لجزيء حجمي مساوياً للتيار الحجمي الخارج منه أي أن يكون تفرق شعاع السرعة معدوماً، وهذا يعني أن معادلة الاستمرار لا تتعلق باختيار جملة الاحداثيات.



اشتقاق معادلة الاستمرار العامة للجريانات غير القابلة للانضغاط غير المستقرة

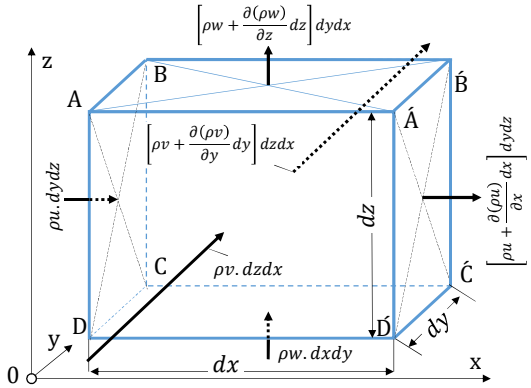
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

معادلة الاستمرار العامة

- في حالة الجريانات غير القابلة للانضغاط $\rho = \text{const}$, تنتج معادلة الاستمرار من المعادلات السابقة باستبدال التيار الكتلي بسرعة التيار الحجمي وتأخذ الشكل الأبسط نسبيا التالي:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad \text{أي} \qquad div\mathbf{V} = 0$$

شرط الاستمرار لجريان غير قابل للانضغاط خال من الينابيع والبالوعات يقضي بأن يكون التيار الحجمي الداخل عبر السطح الخارجي لجزيء حجمي مساوياً للتيار الحجمي الخارج منه أي أن يكون تفرق شعاع السرعة معدوماً، وهذا يعني أن معادلة الاستمرار لا تتعلق باختيار جملة الاحداثيات.



اشتقاق معادلة الاستمرار العامة للجريانات غير القابلة للانضغاط غير المستقرة

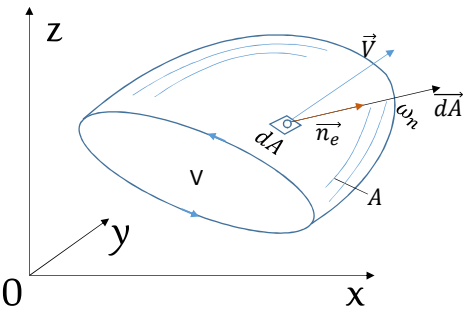
- في حالة الجريانات المستوية, أي عندما $w = 0$ مثلاً، تصبح معادلة الاستمرار حسب:

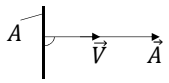
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

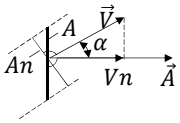
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

استخراج قانون غوص التكاملي

- استخدام قوانين التحليل الشعاعي Vector Analysis ونظرية الحقل Field Theory في صياغة قوانين ميكانيك السوائل يتيح لنا الحصول على صياغة أبسط. كما رأينا بالنسبة لمعادلة الاستمرار ,
- كما ويتيح الاستفادة من الحلول المعروفة لحقول شعاعية مماثلة Analog,
- إعطاء القوانين الرياضية "الجافة " مضموناً فيزيائياً معبراً,



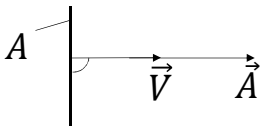




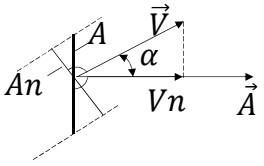
التيار الحجمي عبر سطح لتوضيح مفهوم تفرق شعاع السرعة واستخراج قانون غوص التكاملي

استخراج قانون غوص التكاملي

- حالات اختراق التيار الحجمي لسطح A



- **الحالة الأولى :** عندما يكون شعاع السرعة V موازيا لشعاع الناظم على السطح $\boldsymbol{A = n_e A}$, حيث n_e شعاع واحدة الناظم الذي يعتبر موجبا عندما يشير للخارج,

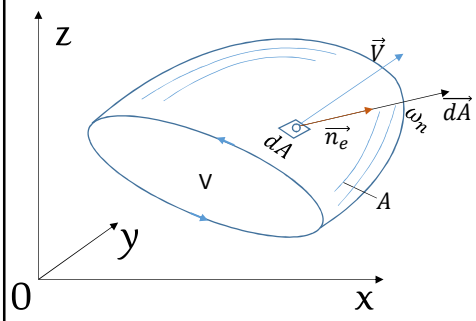


- **الحالة الثانية :** عندما يكون شعاع السرعة مائلاً على السطح بزاوية α

$$Q = VA.\cos\alpha = VA_n = V_nA = \boldsymbol{V.A}$$

التيار الحجمي لسائل ثابت الحجم يساوي الجداء الداخلي لشعاع السرعة في شعاع الناظم على السطح

استخراج قانون غوص التكاملي



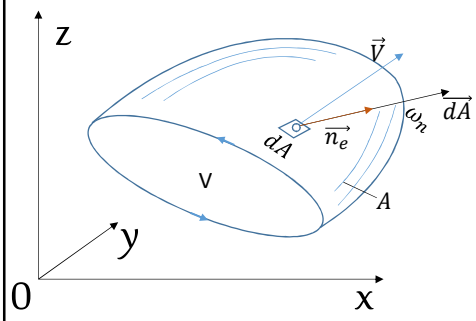
- حالات اختراق التيار الحجمي لسطح A
- **الحالة العامة :** نعتبر الآن داخل حقل الجريان منطقة شكلها على غير تعيين حجمها V ومحددة بالسطح الخارجي المغلق . A
- ليكن dA جزيئاً سطحياً من A , $\boldsymbol{dA} = n_e dA$ شعاع الناظم عليه . فإذا كان $\boldsymbol{V}$ شعاع السرعة الذي يخترق dA فان التيار الحجمي عبر A ينتج:

$$Q = \int dQ = \iint_{(A)} \boldsymbol{V}.d\boldsymbol{A}$$

- من جهة أخرى فان الفرق بين حجم السائل الخارج من جزيء حجمي $dA = dxdydz$ والداخل اليه في واحدة الزمن ينتج من المعادلة السابقة من أجل $\rho = const$:

$$d\dot{V} = \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right] dV = div\, \boldsymbol{V}.dV$$

استخراج قانون غوص التكاملي



- حالات اختراق التيار الحجمي لسطح A
- **الحالة العامة :** نعتبر الآن داخل حقل الجريان منطقة شكلها على غير تعيين حجمها V ومحددة بالسطح الخارجي المغلق . A

- ويكون الفرق الإجمالي بالنسبة لكامل حجم المنطقة المعتبرة V :

$$\dot{V} = \iiint_{(V)} \text{div}\, \boldsymbol{V}.dV$$

- من تساوي العلاقتين السابقين تنتج العلاقة :

$$\dot{V} = Q = \iint_{(A)} \boldsymbol{V}.dA = \iiint_{(V)} \text{div}\, \boldsymbol{V}.dV$$

معروفة باسم قانون غوص- أوستروجراسكي التكاملي
وبواسطته يمكن رياضيا إرجاع التكامل الحجمي إلى تكامل سطحي

الكثافة النبعية

- **حالات اختراق التيار الحجمي لسطح A**

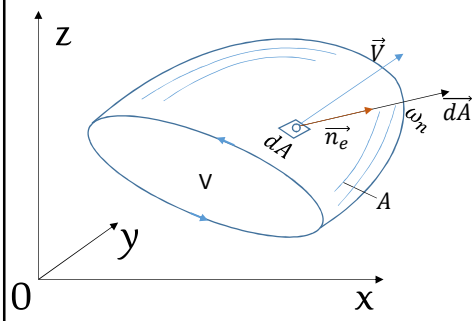
- **الحالة العامة :** نعتبر الآن داخل حقل الجريان منطقة شكلها على غير تعيين حجمها V ومحددة بالسطح الخارجي المغلق . A

- تفرق شعاع السرعة:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{V} = \frac{d\dot{V}}{dV} = \frac{dQ}{dV} = \vartheta_Q$$

- يمثل الكثافة النبعية *Source Density* للتيار الحجمي التي تنعدم عندما يكون $\operatorname{div} \boldsymbol{V} = 0$,
  - ✓ تكون الكثافة النبعية موجبة في النقاط التي توجد فيها **ينابيع**
  - ✓ تكون الكثافة النبعية سالبة في النقاط التي توجد فيها **بالوعات**

إن التيار الحجمي لسائل ثابت الحجم الذي يخرج من سطح مغلق A إعتباطي الشكل يساوي إلى التكامل الحجمي لتفرق شعاع السرعة المعبر عن الكثافة النبعية داخل الحجم V المحدد بالسطح الخارجي A. يطلق على النقاط من حقل الجريان حيث $\operatorname{div} \boldsymbol{V} > 0$ ينابيع , وحيث $\operatorname{div} \boldsymbol{V} < 0$ بالوعات. ويتحقق شرط الاستمرار لكل منطقة من حقل الجريان خالية من الينابيع والبالوعات عندما $\operatorname{div} \boldsymbol{V} = 0$



الكثافة النبعية

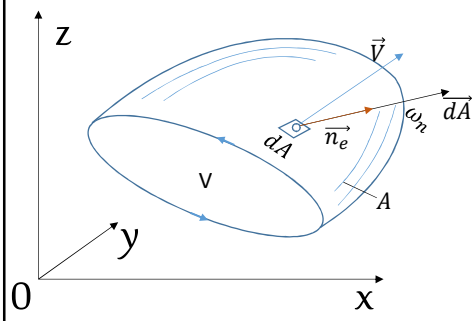
- **الجريانات القابلة للانضغاط المستقرة**

- أن نبدل في العلاقات السابقة شعاع السرعة $\boldsymbol{V}$ بشعاع كثافة التيار الكتلي $(\rho \boldsymbol{V})$.

- في الحالة العامة التي تكون فيها الكثافة متغيرة مع المكان والزمان, وبكتابة العلاقة السابقة بالصياغة الشعاعية التالية:

$$\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{V}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

- نستنتج أن حقل الجريان القابل للانضغاط غير المستقر الذي تتغير كثافته موضعيا من الزمن يمائل حقلا لجريان غير قابل للانضغاط يحتوي على توزع ظاهري محدد **لنقاط شاذة فراغية** تمثل في حالة التمدد (التسارع) بالوعات , وفي حالة الانضغاط (الكبح) ينابيع.



نهاية المحاضرة

أسئلة؟